

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ**  
**муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников**  
**2025-2026 учебный год**

**по МАТЕМАТИКЕ**  
**11 класс**

На олимпиаде используется 7-балльная шкала: каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное верное решение.
6	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
4–5	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. В задаче «Оценка + пример» доказана оценка.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. В задаче «Оценка + пример» построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Кроме того,

- 1) результатом выполнения каждого задания должна быть запись полного решения со всеми необходимыми обоснованиями и выводами; ответ без обоснований (если они требуются) оценивается в 0 баллов;
- 2) любое правильное (полное) решение оценивается в 7 баллов; недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;
- 3) олимпиадная работа не является контрольной работой, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;
- 4) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;
- 5) если к задаче приведены указания к оцениванию – они имеют приоритет над общими указаниями.

1. Сумма чисел  $x, y$  и  $z$  (не обязательно целых) равна 1. Докажите, что произведение чисел  $x + yz, y + zx$  и  $z + xy$  неотрицательно.

*Решение.* Заметим, что  $x + yz = (1 - y - z) + yz = (1 - y)(1 - z)$ . Аналогичное равенство верно для других двух выражений. Следовательно, произведение равняется  $(1 - x)^2(1 - y)^2(1 - z)^2$ , что неотрицательно.

---

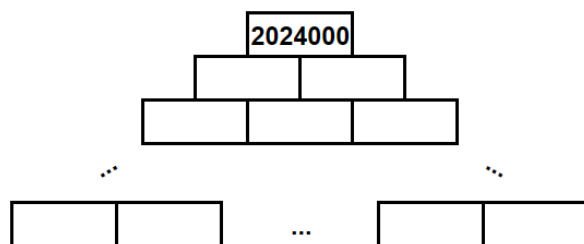
2. Сколькими способами в таблицу  $2 \times 3$  (2 строки, 3 столбца) можно расставить числа от 1 до 6, каждое по одному разу, так, чтобы произведения чисел в строчках отличались в 5 раз?

*Ответ:* 144.

*Решение.* Если мы перемножим оба произведения, то получим произведение всех чисел от 1 до 6, то есть 720. Если разделить этот результат на 5, то получится меньшее из произведений, умноженное само на себя. Так как  $720/5 = 144 = 12 \cdot 12$ , то меньшее произведение равно 12, а большее — 60. Ясно, что цифра 5 содержится в большем произведении, так что нам нужно выяснить, как можно оставшиеся пять чисел разбить на две группы по два и три числа с произведениями 12. Легко видеть, что группа из двух чисел может быть только (6, 2) или (4, 3). Итого, у нас есть два способа выбрать разбиение шести чисел на две тройки, в каждой тройке можно переставить числа  $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$  способами, а потом есть два способа выбрать, какая тройка в какую из двух строк будет записана. Следовательно, ответ в задаче  $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 144$ .

---

3. На каждом из 10 кирпичей, лежащих в основании пирамиды (см. картинку), написано натуральное число. На каждом из остальных кирпичей записано произведение двух чисел в кирпичах, на которых он лежит. В самом верхнем кирпиче написано 2024000. Сколько кирпичей с нечётными числами может быть в этой пирамиде?



*Ответ.* 36 или 45.

*Решение.* Если в основании есть кирпич с чётным числом и не лежащий с краю, то двойка в разложении до кирпича-вершины может идти хотя бы 9 способами. При этом в разложении числа 2024000 всего 7 двоек, что слишком мало. Тогда наши кирпичи с двойками в основании могут стоять только с одного или двух краёв (какие-то должны быть, раз в вершине чётное число). Но тогда соответствующие стороны будут полностью состоять из чётных чисел. Если это обе стороны, то будет  $8 + 7 + \dots + 1 = 36$  нечётных чисел. В примере можно в угловые кирпичи основания вписать 2024 и 1000, а в

остальные на основании — 1. Если только одна сторона, то  $9 + 8 + \dots + 1 = 45$  нечётных чисел. Пример состоит из 2024000 и девяти 1.

*Доказан случай 36 и 45 и есть примеры – 7б.*

*Только один из случаев с примером – 4б.*

*Только один из случаев без примера – 2б.*

---

4. Найдите все такие пары простых чисел  $p$  и  $q$ , что  $p^{q-1} + q^{p-1}$  — точный квадрат.

*Ответ:  $(p, q) = (2, 2)$ .*

*Решение.*

1. Оба простых нечётные. Тогда  $q - 1$  и  $p - 1$  чётные, а потому  $p^{q-1} \equiv q^{p-1} \equiv 1 \pmod{4}$ , и их сумма  $\equiv 2 \pmod{4}$ , что не бывает квадратом. Противоречие.
2. Ровно одно из  $p, q$  равно 2. Пусть  $p = 2$ , а  $q \geq 3$  нечётное. Тогда требуется, чтобы  $2^{q-1} + q$  было квадратом. Но  $2^{q-1}$  — точный квадрат (так как  $q - 1$  чётно), и следующий за ним квадрат равен

$$(2^{(q-1)/2} + 1)^2 = 2^{q-1} + 2^{(q+1)/2} + 1$$

Для всякого  $q \geq 3$  имеем  $0 < q < 2^{(q+1)/2} + 1$  (при  $q = 3$  правая часть уже  $5 > 3$ , далее только растёт). Значит

$$2^{q-1} < 2^{q-1} + q < 2^{q-1} + 2^{(q+1)/2} + 1 = (2^{(q-1)/2} + 1)^2$$

и число  $2^{q-1} + q$  лежит строго между двумя соседними квадратами, следовательно, квадратом быть не может. Случай  $q = 2, p$  нечётно, разбирается симметрично.

3.  $(p, q) = (2, 2)$ . Даёт  $2^1 + 2^1 = 4 = 2^2$ . Других пар нет.

*Правильный ответ: 1 балл.*

*Разбор случая обоих нечётных простых: 3 балла.*

*Разбор случая ровно одного из простых равного 2: 3 балла.*

---

5. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $AM$ . На луче  $AB$  отмечена такая точка  $D$ , что  $\angle ADM = \angle ACM$ , а на луче  $AC$  — такая точка  $E$ , что  $\angle AEM = \angle ABM$ . Описанные окружности треугольников  $ACD$  и  $ABE$  пересекаются в точках  $A$  и  $S$ . Докажите, что  $AS \parallel BC$ .

*Решение (1).* Пусть  $AB > AC$ . Тогда ясно, что точка  $D$  лежит на отрезке  $AB$ , а точка  $E$  — на продолжении отрезка  $AC$  за точку  $C$ . Заметим, что

$$\angle CME = \angle ACM - \angle CEM = \angle ADM - \angle DBM = \angle DMB.$$

Тогда точки  $D, M$  и  $E$  лежат на одной прямой. Более того,  $\angle DBC = \angle DEC$  и, следовательно, четырехугольник  $BDCE$  вписанный. Так как  $BM = MC$ , то  $CD$  не параллельно  $BE$ . Пусть  $CD \cap BE = I$ . Заметим, что  $I$  — радикальный центр окружностей, описанных вокруг треугольников  $ADC, ABE$  и четырехугольника  $BDCE$ . Поэтому прямая  $AS$  проходит через точку  $I$ . С другой стороны, по теореме Чевы для треугольника  $EBC$  и

чевиан  $BA, CI$  и  $EM$ , пересекающихся в точке  $D$ , имеем  $EA/AC \cdot CM/MB \cdot BI/IE = 1$ . То есть,  $EA/AC = EI/IB$  и прямые  $AI$  и  $BC$  параллельны.

*Решение (2).* На серединном перпендикуляре к  $BC$  рассмотрим такую точку  $K$ , что  $KC \perp AC$ . Пусть  $D'$  — основание перпендикуляра из точки  $K$  на  $AB$ . Заметим, что точки  $A, C, K, D'$  лежат на окружности с диаметром  $AK$ . А также, точки  $B, M, K, D'$  лежат на окружности с диаметром  $BK$ . Тогда  $\angle(AC, KC) = \angle(AD', KD') = \angle(KD', AD')$  и  $\angle(MC, KC) = \angle(KB, MB) = \angle(KD', MD')$ . Вычитая, получаем, что  $\angle(AC, CM) = \angle(MD', AD')$ , то есть,  $\angle ACM = \angle D'M$ . Таким образом  $D' = D$  и центр описанной окружности треугольника  $ACD$  — середина отрезка  $AK$ . Аналогичным образом доказывается, что если точка  $L$  на серединном перпендикуляре к  $BC$  такова, что  $LB \perp AB$ , то центр описанной окружности треугольника  $ABE$  — середина отрезка  $AL$ . Из этого следует, что линия центров этих двух окружностей является средней линией треугольника  $AKL$ , а, значит, перпендикулярна  $BC$ , что и означает, что  $AS \parallel BC$ .